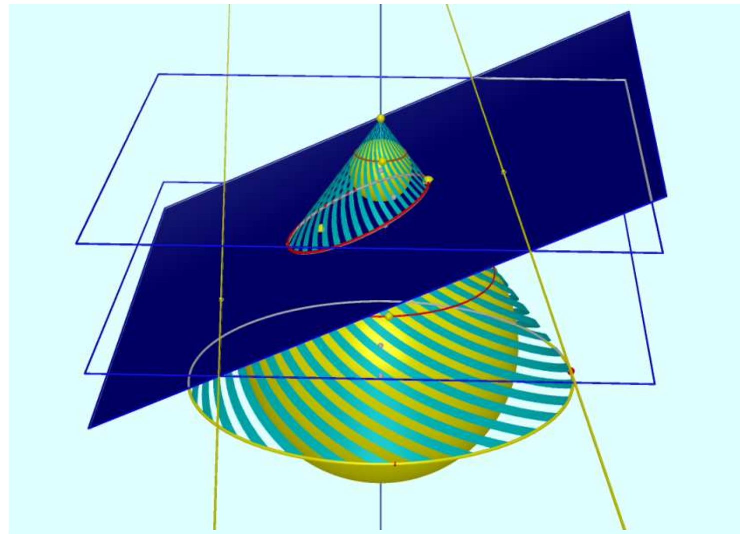
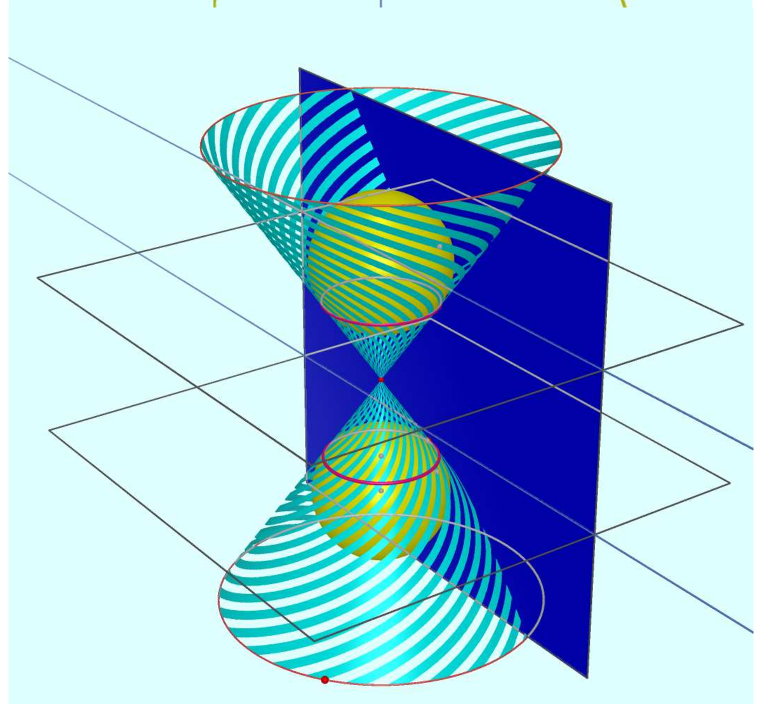




Universidad Autónoma del Estado de Morelos

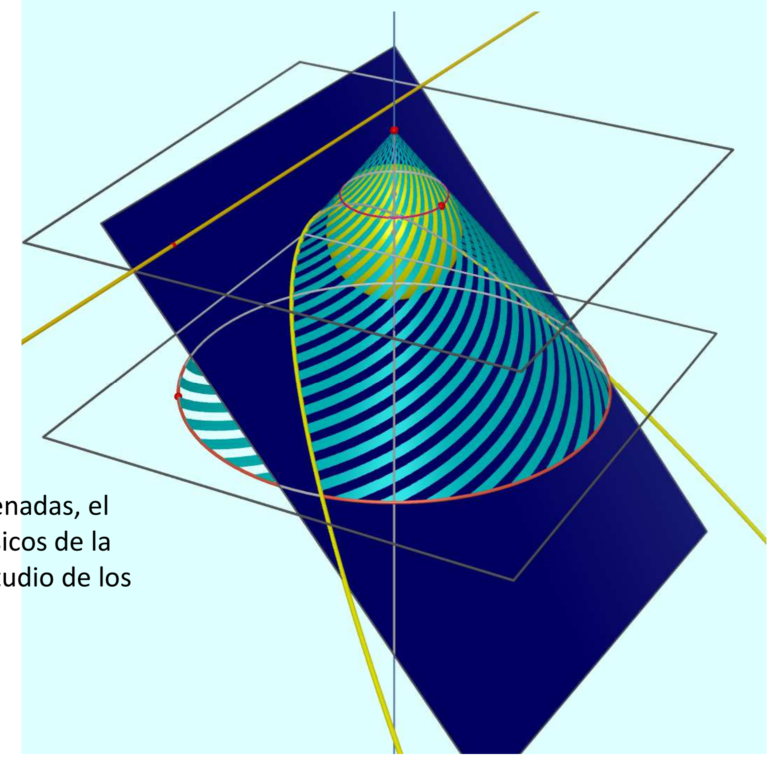
Preparatoria Diurna de Cuautla

Sistema de Educación Abierta y a Distancia

Matemáticas IV

Módulo 1

Antecedentes



En este módulo se estudian los sistemas de coordenadas, el plano cartesiano y algunos otros antecedentes básicos de la Geometría Analítica necesarios para abordar el estudio de los lugares geométricos y las cónicas.

INTRODUCCIÓN

Si se consulta un mapa de la Ciudad de México para buscar una dirección, se ve que para auxiliar al usuario cada mapa cuenta con un sistema de coordenadas que facilita la ubicación, en el plano, de cualquier calle o colonia que se desee localizar. Los sistemas de coordenadas tienen una gran importancia tanto en aplicaciones en la vida diaria de los individuos como en las ciencias aplicadas. Un ejemplo muy actual son los sistemas GPS o Sistemas de Posicionamiento Global, los cuales por medio de satélites permiten localizar con un sistema de coordenadas cualquier objeto sobre la superficie terrestre, por ejemplo, automóviles robados. En el siglo XVII dos matemáticos eminentes consideraron que las matemáticas necesitaban métodos nuevos. Tanto Descartes como Fermat, trabajando independientemente, vislumbraron las potencialidades del álgebra para la representación y el estudio de las curvas. Básicamente, lo hecho por ellos consistió en idear un esquema sencillo para representar la posición de cualquier punto del plano por medio de coordenadas, esto es, números que representan distancias a partir de dos ejes.

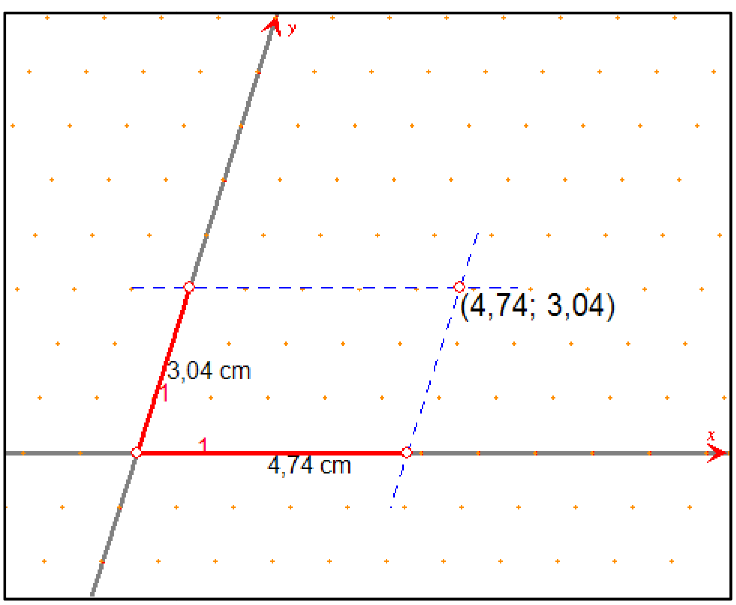
ANTECEDENTES

Para poder estudiar posteriormente los lugares geométricos y las cónicas, se requiere conocer ciertos conceptos previos. Aquí se van a estudiar los siguientes: sistema de ejes cartesianos, distancia entre dos puntos, punto medio de un segmento y distancia de un punto a una recta.

Sistema de ejes coordenados

La Geometría analítica utiliza sistemas de ejes coordenados para localizar y representar puntos en un plano o en el espacio. En este curso se estudiara sólo la geometría analítica plana.

Dado un par de rectas numéricas que se cortan, se puede asociar a cada punto del plano un par ordenado de números reales, los cuales permiten localizar tal punto. Se les llama par ordenado porque el orden en que se anotan es siempre el mismo, el primer número del par se refiere a la coordenada respecto a una de las rectas y el segundo a la otra. Para determinar las coordenadas se trazan rectas paralelas a las rectas y se miden las distancias desde el punto de intersección de las rectas.



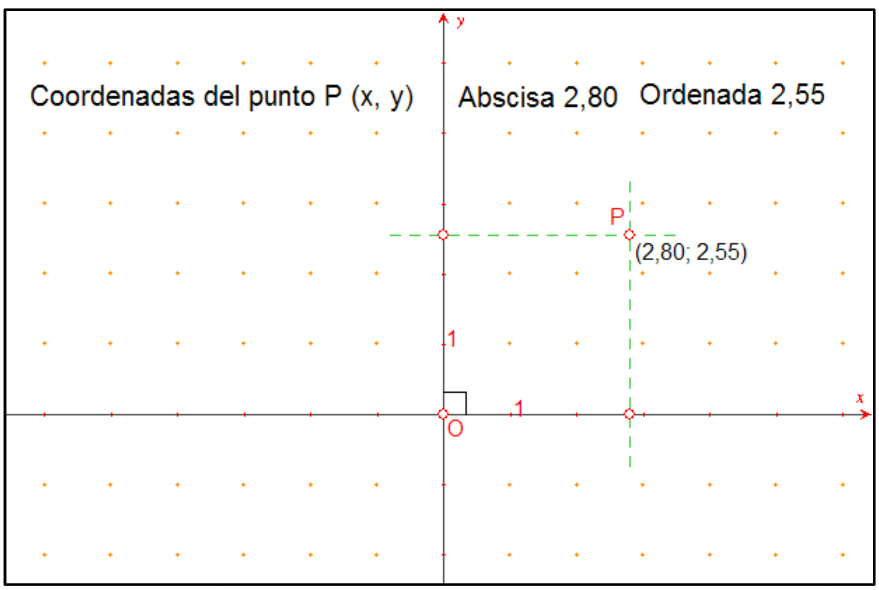
Ver applet: Sistema de Coordenadas.

Plano cartesiano[1]

El ángulo que forman las dos rectas puede ser cualquiera pero por comodidad se prefiere utilizar un ángulo recto. Cuando las rectas consideradas son perpendiculares entre sí, al par de números se les llama **coordenadas cartesianas** del punto y a las rectas se les llama **ejes**; a uno, eje X y, al otro, eje Y. Al punto de intersección de los ejes se denomina **origen** y se identifica usualmente con la letra $\mathbf{O}$. A un sistema de coordenadas definido de esta manera se le conoce también como **plano cartesiano**.

Se escoge una unidad de longitud que permita graduar los ejes. Convencionalmente se da sentido a los ejes de la siguiente manera: para el eje X a partir del origen los números que se ubiquen a la derecha se consideran positivos, los que se sitúan a la izquierda negativos. En el eje Y, los números que están arriba del origen serán positivos y los de abajo, negativos. La forma de anotar el lugar que ocupa un punto en el plano cartesiano es mediante dos coordenadas, separadas por una coma y encerradas entre paréntesis. Se anota primero la coordenada del punto en el eje X y después la del eje Y.

En general, a un punto (x, y) del plano cartesiano se le llama pareja ordenada, porque se trata de dos números –representados con variables– que tienen un orden. Este orden es importante, ya que sitúa con de manera inequívoca cada punto; así, por ejemplo, el punto $\mathbf{(2, –2)}$ es distinto del punto $\mathbf{(–2, 2)}$. A las coordenadas cartesianas también se les conoce como **coordenadas rectangulares**, a las coordenadas sobre el eje X, **abscisas**; y a las coordenadas sobre el eje Y, **ordenadas**.

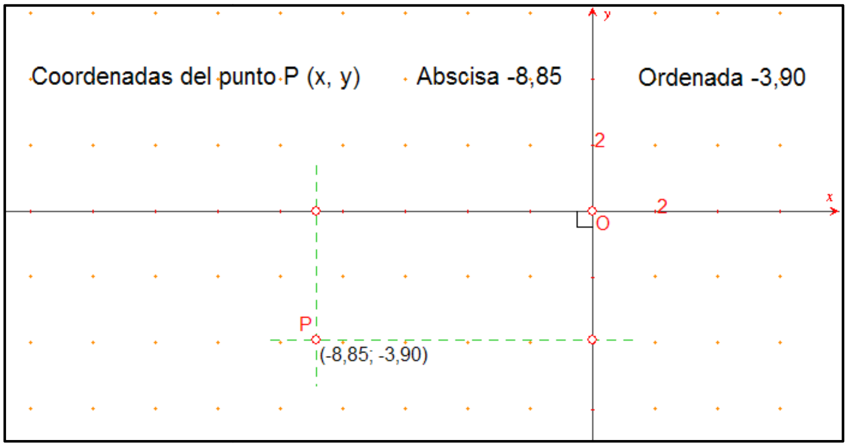


Ver applet Plano cartesiano

Al dibujar un plano cartesiano el origen puede ubicarse en cualquier parte del espacio disponible. Además, la graduación de los ejes puede determinarse a una distancia arbitraria, pero fija. El primer número asignado a una marca en un eje lo determina la persona que elabora la gráfica. Una vez asignado ese número, la longitud del origen a la marca correspondiente determina el número de unidades asociadas a esa longitud. Esta asignación numérica que define la unidad de medida en cada eje se llama **escala** del eje.

[1] Los conceptos *coordenadas cartesianas* y *plano cartesiano* deben su nombre René Descartes (1596–1650) matemático y filósofo francés que desarrolló la geometría analítica.

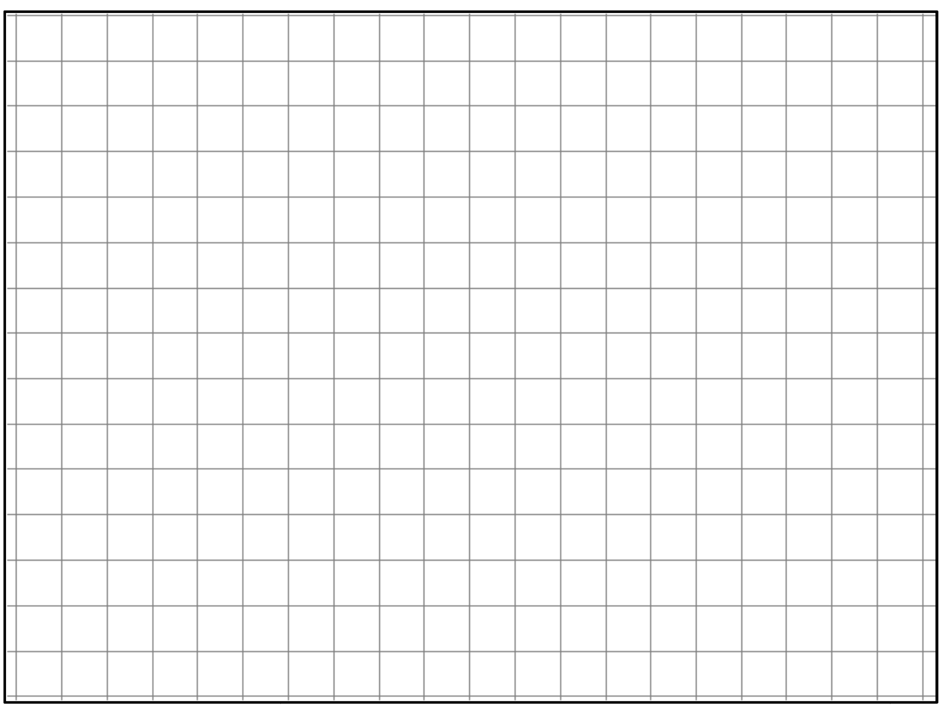
Por ejemplo, en la figura anterior, la escala indicada por los números **1** que aparecen en la primera marca sobre los ejes señala que en esa gráfica cada marca sobre los ejes representa una unidad. En cambio en la figura siguiente, cada marca sobre los ejes representa **2** unidades. Observa también que el origen no está ubicado al centro de la gráfica.



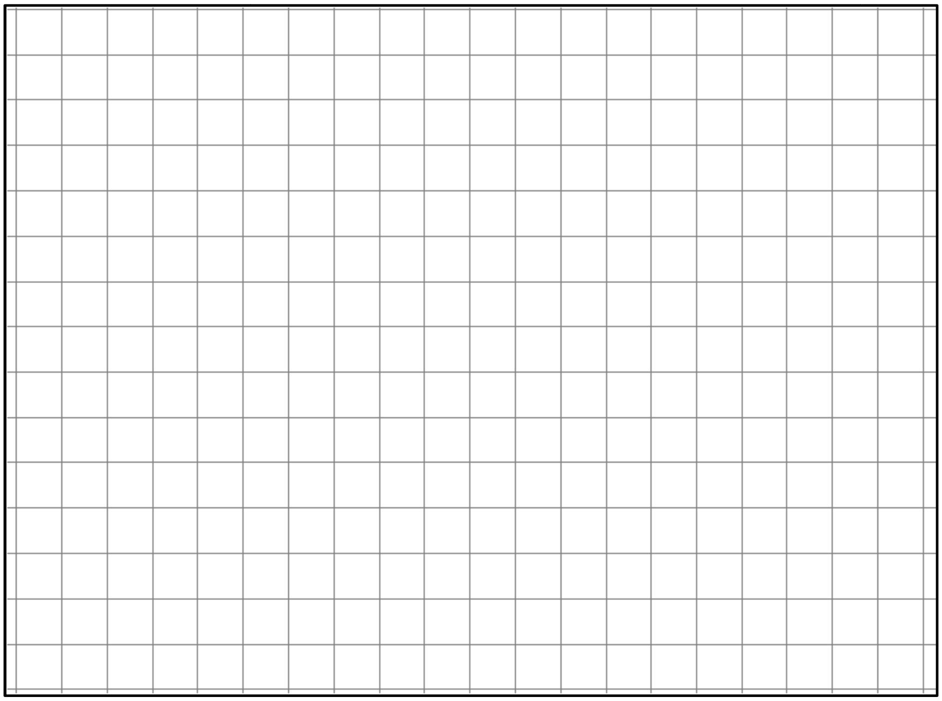
En el applet Plano cartesiano se puede cambiar la escala y mover el origen de las coordenadas.

Actividades de aprendizaje 01

1. En la siguiente cuadrícula escoge la ubicación del origen y la escala más apropiada para trazar el plano cartesiano y representar los siguientes puntos: **A (-10, 8)**, **B (-6, -1)**, **C (1.5, 3)**, **D (-4, 7.5)**, **E (-7, 2)**, **F (-1, 5)**, **G (-6.8 -2.5)**, **H (-12, 3)**, **I (0.5, 9)** y **J (-3.5, 7.5)**.



2. En la siguiente cuadrícula escoge la ubicación del origen y la escala más apropiada para trazar el plano cartesiano, y representa las siguientes figuras: El triángulo que tiene sus vértices en los puntos **A (0, -10) B(65, 30)** y **C(90, -82.5)**, el círculo con centro en el punto **D(57.5, -60)** y de radio **40**, el segmento que une los puntos **E(120, -20)** y **F(-35, 20)**, la recta que pasa por los puntos **G(0, -15)** y **H (25, 0)**.



3. En la siguiente figura se representan diferentes puntos sobre un plano cartesiano. Anota las coordenadas de cada uno de ellos.

A (________, ________)

B (________, ________)

C (________, ________)

D (________, ________)

E (________, ________)

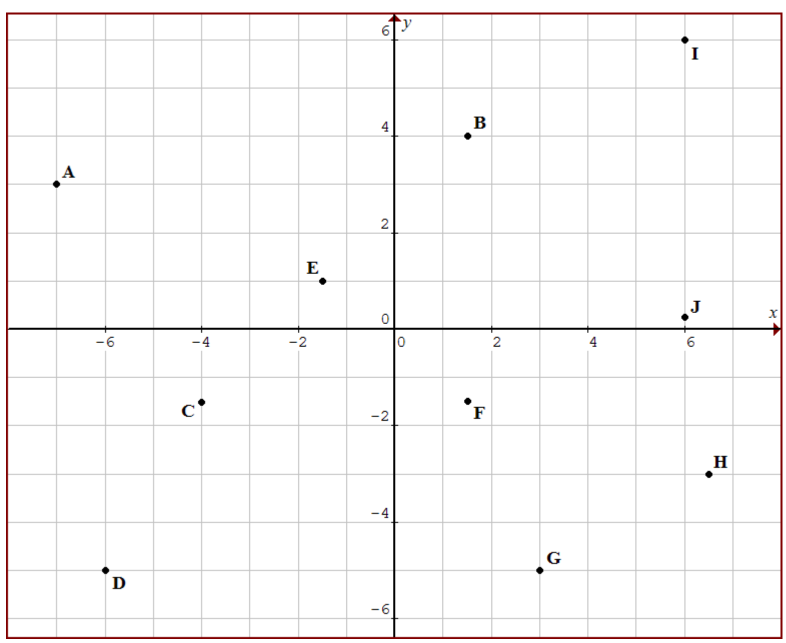
F (________, ________)

G (________, ________)

H (________, ________)

I (________, ________)

J (________, ________)



4. En la siguiente figura se representan diferentes puntos sobre un plano cartesiano. Anota las coordenadas de cada uno de ellos.

K (________, ________)

L (________, ________)

M (________, ________)

N (________, ________)

P (________, ________)

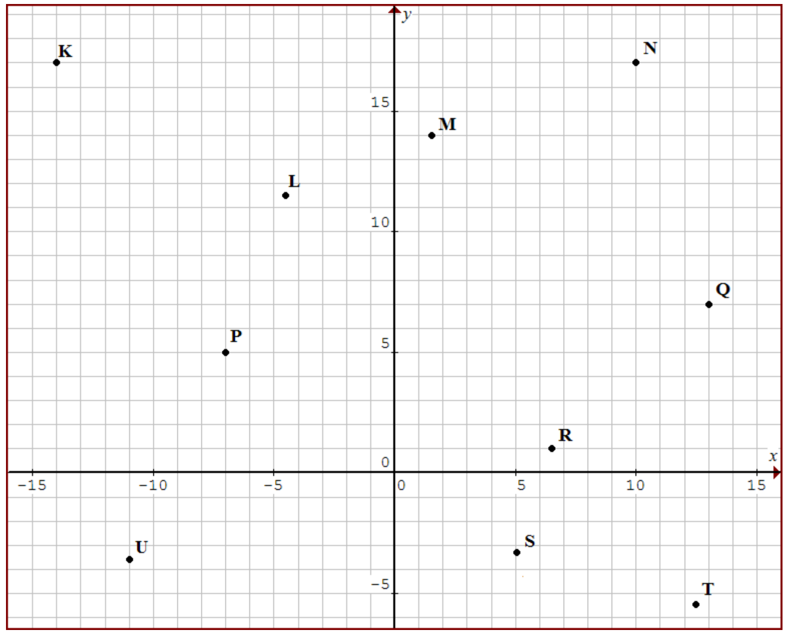
Q (________, ________)

R (________, ________)

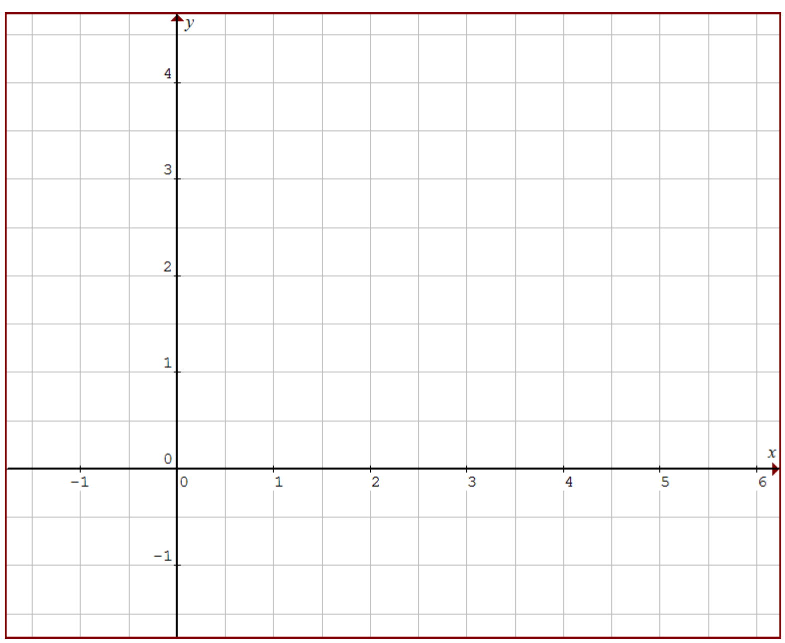
S (________, ________)

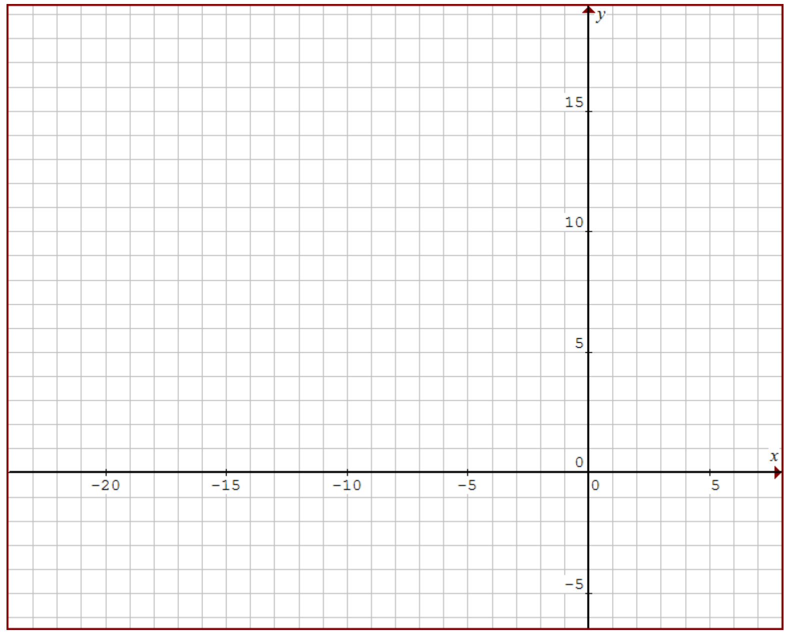
T (________, ________)

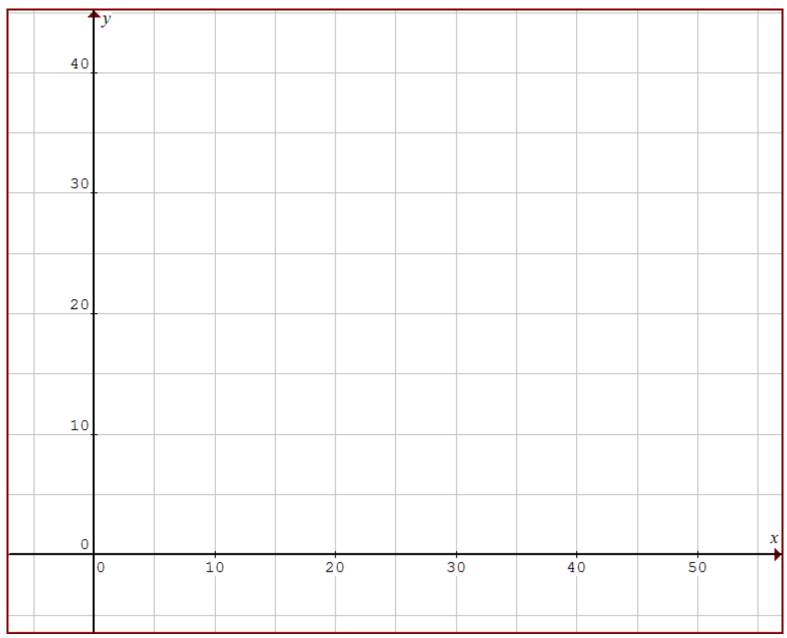
U (________, ________)

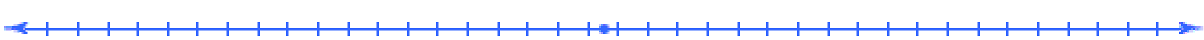


5. De los siguientes planos cartesianos escoge el más apropiado para representar cada una de las siguientes figuras:
a) Triángulo con vértices **A (0.5, 1.5)**, **B (5, –1)** y **C (5, 3.5)**.
b) Cuadrilátero cuyos vértices son los puntos **D (5, 20)**, **E (25, 5)**, **F (45, 10)** y **G (25, 25)**.
c) Círculo con centro en **H (–15, 10)** y cuyo radio mide **35**.
d) Recta que pasa por el punto **I (–16, –5)** y por el punto **J (0, 15)**
e) Segmento que une los puntos **K (–5, –5)** y **L (45, 5)**.
f) Punto **M (–0.5, 3)**.



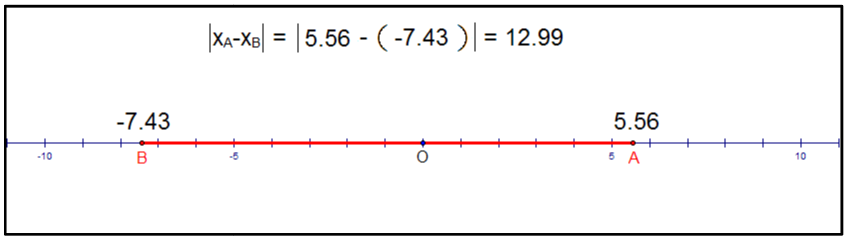

y
15
10
5
0
x
-20
-15
-10
-5
0
5
-5


y
40
30
20
10
0
x
0
10
20
30
40
50



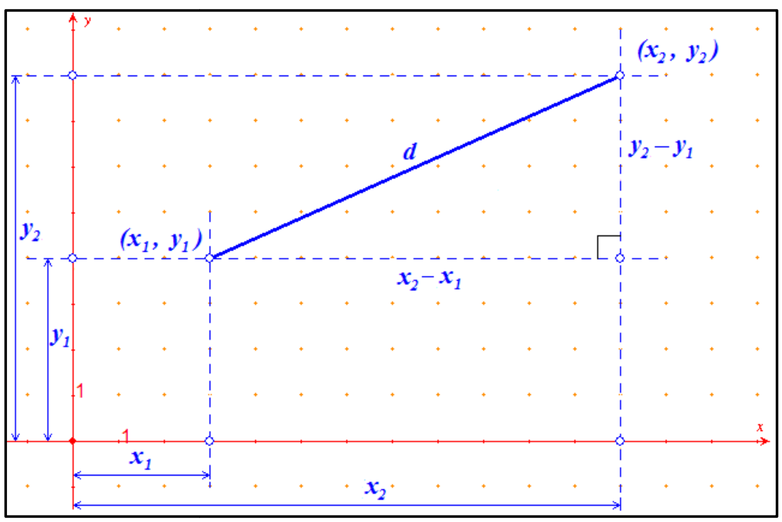
Distancia entre dos puntos

Para calcular la distancia entre dos puntos de una recta numérica, se toma el valor absoluto de la diferencia de sus coordenadas.



Para encontrar la distancia entre dos puntos en el plano se aplica el teorema de Pitágoras. El teorema de Pitágoras señala que: en todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Calcular la distancia entre dos puntos, equivale a determinar la longitud del segmento de recta cuyos extremos son dichos puntos. Primero se dibuja el segmento en un plano cartesiano; luego, en cada uno de los extremos del segmento, se trazan rectas paralelas a los ejes cartesianos. Al trazar las rectas paralelas a los ejes se forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es precisamente el segmento cuya longitud se desea conocer.

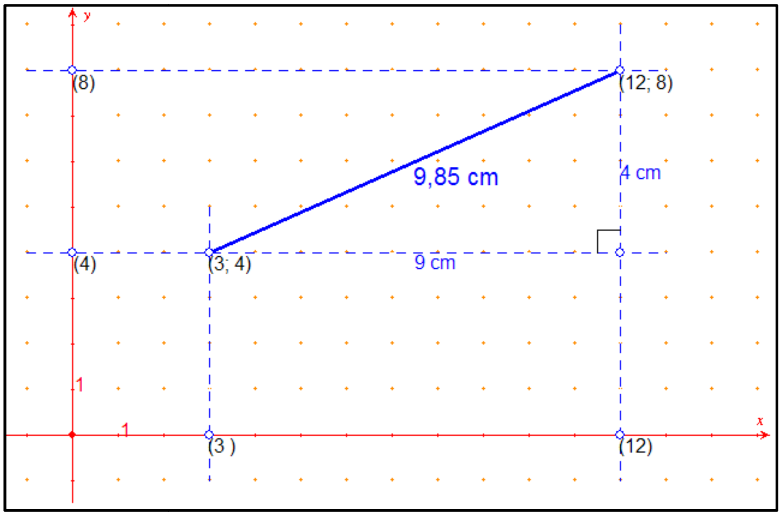


En la figura anterior, se muestra un triángulo rectángulo de hipotenusa ***d*** y catetos de longitud $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$, al aplicar el teorema de Pitágoras se obtiene la fórmula siguiente:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta fórmula representa la longitud de un segmento de recta determinado por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). O dicho de otra manera, representa la distancia entre dichos puntos.

La siguiente figura muestra un ejemplo.



Ver applet Distancia entre dos puntos

Aplicando la fórmula se puede calcular la distancia entre los puntos **(3, 4)** y **(12, 8)** de la siguiente manera:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(12-3)^2 + (8-4)^2}$$

$$d = \sqrt{9^2 + 4^2}$$

$$d = \sqrt{81+16}$$

$$d = \sqrt{97} \approx 9.85$$

La fórmula para calcular la distancia entre dos puntos es independiente del cuadrante donde se encuentren los puntos. Esto se debe a que las diferencias $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$ se elevan al cuadrado, por lo tanto, el resultado siempre será un número no negativo (positivo o cero). La raíz cuadrada es positiva, esto significa que la distancia d es siempre un número no negativo.

Observa también que, para calcular la distancia, al sustituir las coordenadas de los puntos no importa cuál de ellos se elija para ser (x_1, y_1) o (x_2, y_2), el resultado no cambia. Esto se debe a que la única alteración posible sería que cambie el signo de las diferencias $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$, pero como cada una de ellas está elevada al cuadrado, finalmente siempre son positivas o cero, por lo tanto, no cambia el resultado.

Actividades de aprendizaje 02

1. Calcular la distancia entre los siguientes pares de puntos.

a) $(5, 3)$ y $(3, 4)$ b) $(-2, 5)$ y $(4, -3)$ c) $(5, 2)$ y $(-1, 6)$ d) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ y $\left(2, \frac{3}{4}\right)$

2. Encontrar el perímetro de los triángulos cuyos vértices son los puntos indicados.

a) A $(12, 2)$ B $(-3, 5)$ C $(8, 8)$

b) A $(10, 4)$ B $(9, 7)$ C $(6, 10)$

c) A $(0, 0)$ B $(-2, -3)$ C $(-7, -11)$

3. Dados los vértices encontrar la medida de los lados del triángulo y con base en dichas medidas encontrar qué tipo de triángulo (equilátero, isósceles o escaleno) es cada uno de ellos.

a) A $(2, 6)$ B $(17, 1)$ C $\left(\frac{29}{2}, \frac{37}{2}\right)$

b) A $(1, 2)$ B $(5, 1)$ C $(4, 5)$

c) A $(1, 4)$ B $(-4, 5)$ C $(8, -3)$

d) A $(3, 3)$ B $(-3, -3)$ C $\left(-3\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}\right)$

4. Dados los vértices encontrar la medida de los lados del triángulo y con base en dichas medidas encontrar qué tipo de triángulo (rectángulo, obtusángulo, acutángulo) es cada uno de ellos.

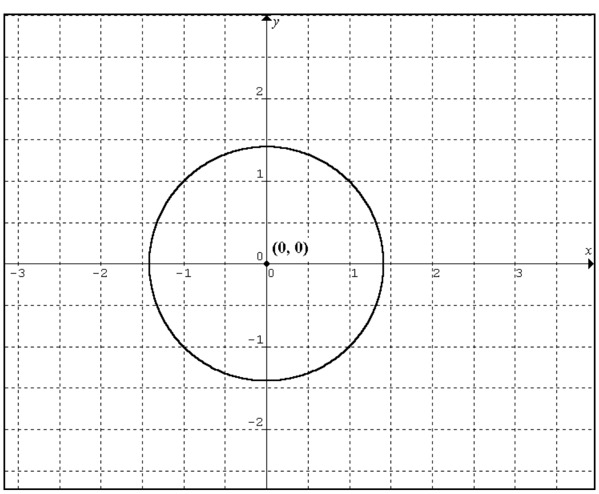
a) A $(3, -2)$ B $(9, 6)$ C $(10, 5)$

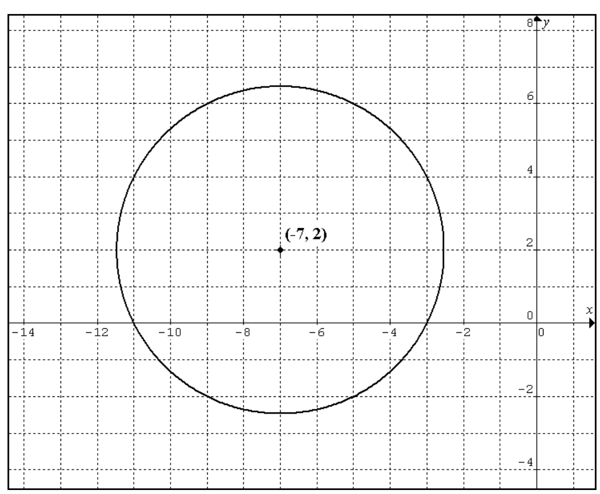
b) A $(1, 2)$ B $(3, -4)$ C $(5, -6)$

c) A $(-1, -2)$ B $(-5, -1)$ C $(-4, -5)$

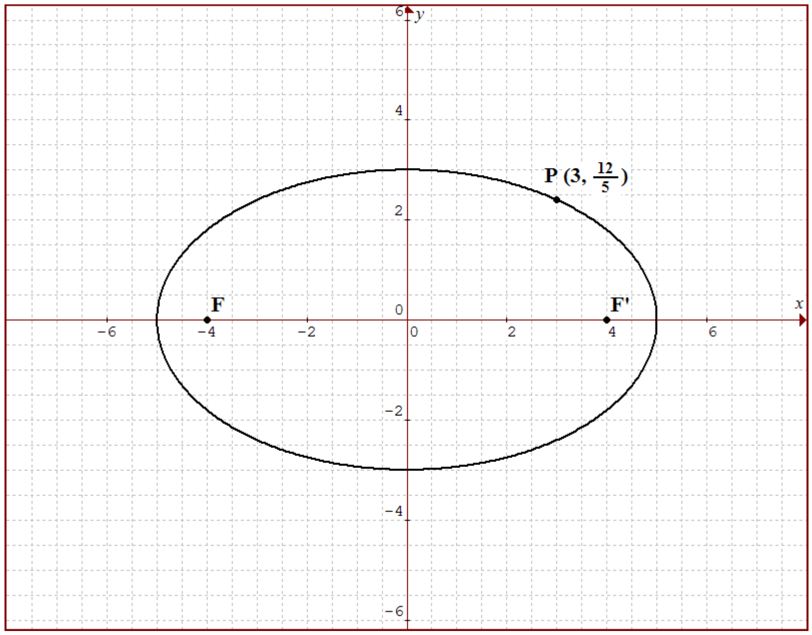
d) A $(0, 2)$ B $(3, 0)$ C $(4, 8)$

5. En los siguientes círculos se da la ubicación del centro, determina el radio de cada uno.

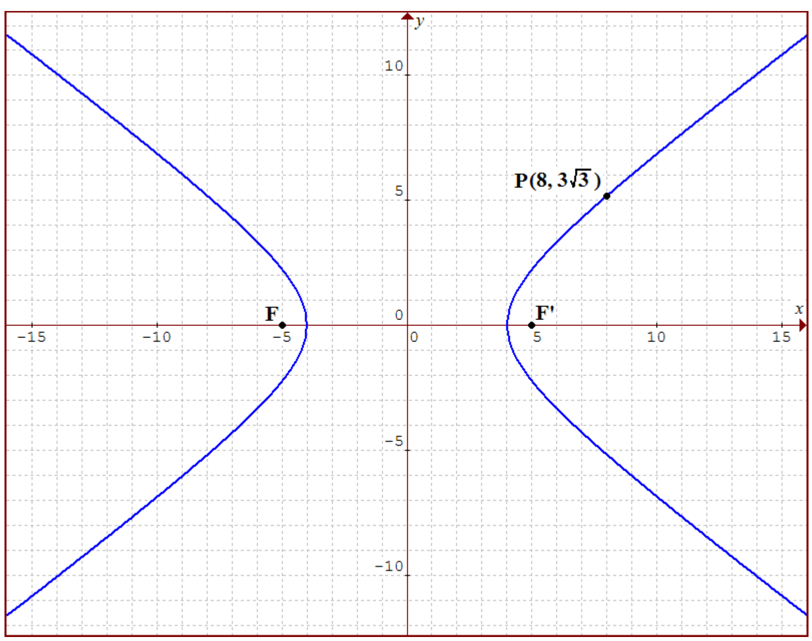




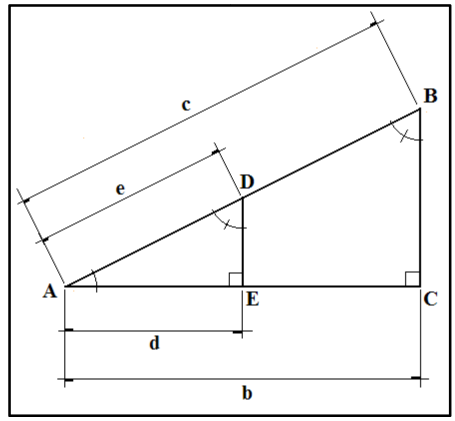
6. La siguiente gráfica muestra una elipse, los puntos **F** y **F'** son los focos de ella y el punto **P** pertenece a la misma elipse. Calcula las distancias del punto **P** a ambos focos. ¿Cuál es la suma de esas dos distancias?



7. La siguiente gráfica muestra una hipérbola, los puntos **F** y **F'** son los focos de ella y el punto **P** pertenece a la misma hipérbola. Calcula las distancias del punto **P** a ambos focos. ¿Cuál es el valor absoluto de la diferencia de estas dos distancias?

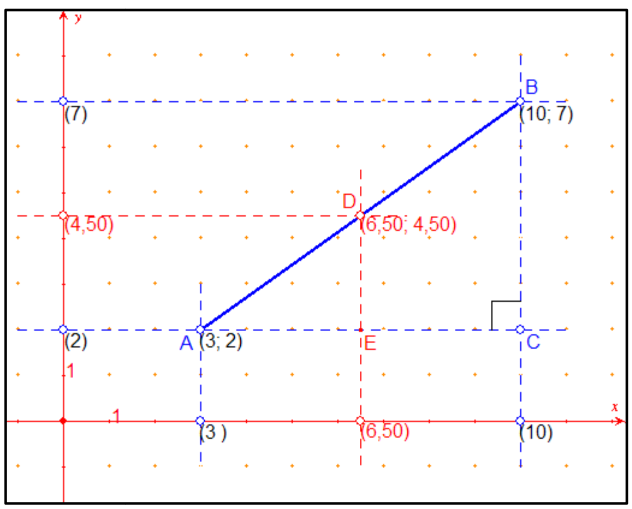


Punto medio de un segmento



En cursos anteriores de geometría aprendiste que los lados correspondientes de dos triángulos semejantes son proporcionales, por ejemplo, en la figura siguiente se muestran dos triángulos **ABC** y **ADE**, ambos son triángulos rectángulos y comparten el ángulo agudo **A**. Estos triángulos son semejantes, esto es, tienen la misma forma pero tamaño diferente. Sabemos que tienen la misma forma porque sus ángulos interiores son congruentes (miden lo mismo), los ángulos **B** y **D** son congruentes, los ángulos **E** y **C** son rectos y por tanto congruentes entre sí.

Los lados **c** y **b** son proporcionales a los lados **e** y **d**. En el caso en que el punto **D** sea el punto medio del lado **AB**, entonces **e** mide la mitad de **c**. Por lo tanto **d** mide exactamente la mitad de **b**. Esto hace que las coordenadas del punto medio de un segmento se puedan encontrar obteniendo el promedio de las coordenadas de sus extremos. Esto se puede observar en el ejemplo que se muestra en la siguiente figura:



Ver applet Punto medio

En general, si las coordenadas de los extremos de un segmento son (x_1, y_1) y (x_2, y_2), entonces las coordenadas de su punto medio son:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Aplicado esto al ejemplo de la figura anterior tenemos, los puntos extremos del segmento **AB** son **A (3, 2)** y **B (10, 7)**, entonces las coordenadas del punto medio **D** del segmento **AB** son:

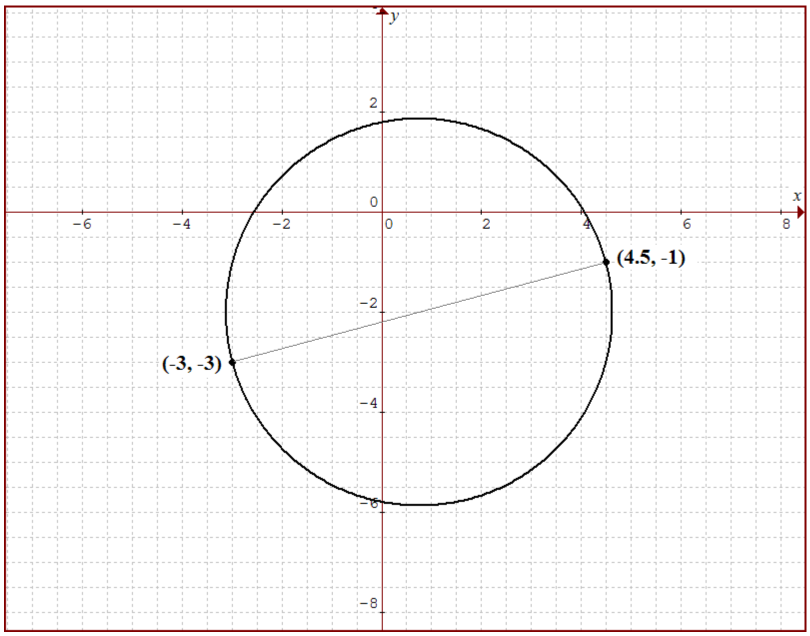
$$\left(\frac{3+10}{2}, \frac{2+7}{2}\right) \quad \text{o} \quad \left(\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right) \quad \text{o} \quad (6.5, 4.5)$$

Actividades de aprendizaje 03

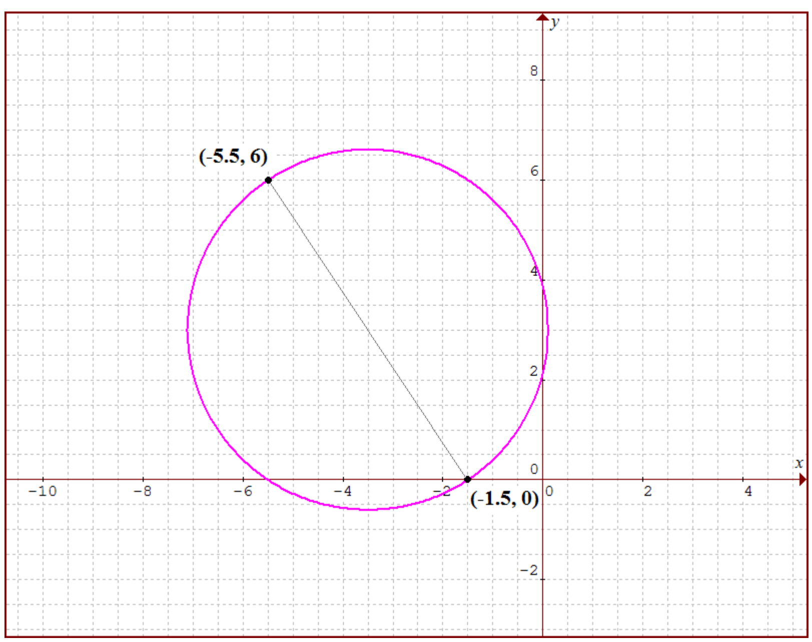
1. Encuentra las coordenadas del punto medio entre los puntos que se indican.

a) $(-3, -2)$ y $(1, 1)$ b) $(0, -7)$ y $(3, -4)$ c) $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ d) $\left(-4, -\frac{4}{3}\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$

2. Las siguientes figuras muestran círculos de los cuales se indican los extremos de un diámetro. Encuentra las coordenadas del centro y calcula la medida del radio de cada uno de ellos.



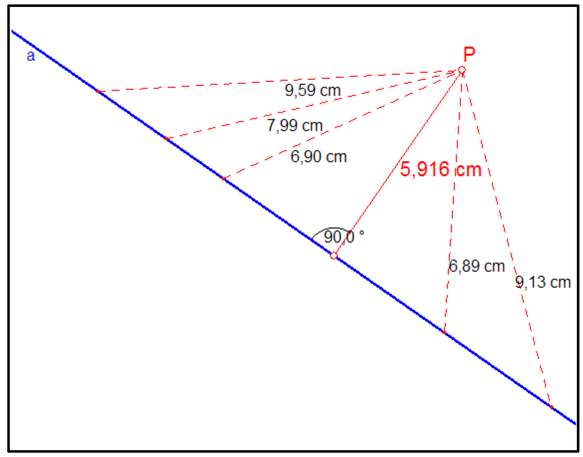
a)



b)

Distancia de un punto a una recta

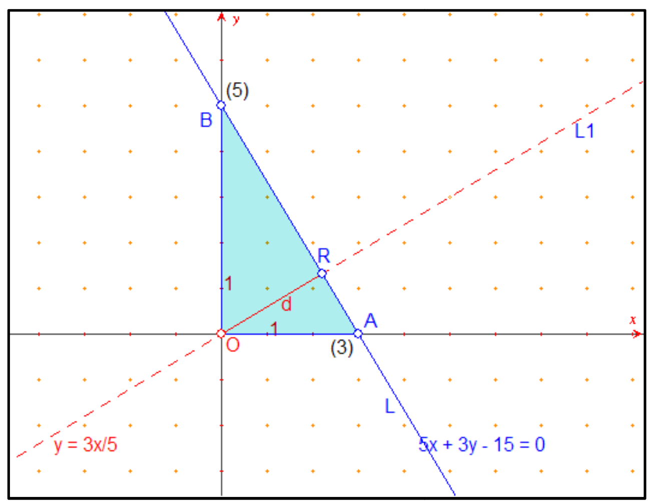
Dada una recta y un punto fuera de ella (ver figura), puede formarse una infinidad de posibles distancias del punto a la recta. Sin embargo, aplicando el teorema de Pitágoras se puede demostrar que la distancia más corta del punto a la recta viene a ser precisamente la perpendicular a ésta. Por lo tanto, cuando nos referimos a la distancia de un punto a la recta, implícitamente nos referimos a la distancia medida sobre una recta perpendicular desde el punto a la recta.



Ver applet Distancia punto_recta_01

Si se tiene una recta **L** que no sea paralela a ninguno de los ejes, de acuerdo a lo estudiado en cursos anteriores, se sabe que su ecuación es de la forma $\mathbf{A}x + \mathbf{B}y + \mathbf{C} = 0$, con $\mathbf{A} \neq 0$ y $\mathbf{B} \neq 0$, y su pendiente es $m = -\frac{A}{B}$. La distancia de la recta al origen se mide sobre una recta $\mathbf{L_1}$ perpendicular a **L**, que pasa por el origen, la ecuación de esta recta $\mathbf{L_1}$ es $y = \frac{B}{A}x$ .y su pendiente es $\frac{B}{A}$.

La distancia buscada corresponde a la longitud del segmento **OR** (ver figura). Dado que la recta $\mathbf{L_1}$ es perpendicular a la recta **L**, se forman dos triángulos rectángulos semejantes **OAB** y **AOR** determinados por las intercepciones de la recta con los ejes (ordenada y abscisa al origen). Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, el teorema de Pitágoras y la proporcionalidad de los lados de los triángulos semejantes, se puede deducir la medida **d** buscada.[2]



En general, la distancia **d** desde el origen a la recta $\mathbf{A}x + \mathbf{B}y + \mathbf{C} = 0$ está dada por:

$$d = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ver applet Distancia de una recta al origen

Por ejemplo: se puede encontrar la distancia del origen a la recta $5x + 3y - 15 = 0$, de la siguiente forma:

$$d = \frac{|-15|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} = \frac{15}{\sqrt{25 + 9}} = \frac{15}{\sqrt{34}} \approx 2.572$$

[2] Para una demostración detallada consultar cualquiera de los textos incluidos en la bibliografía.

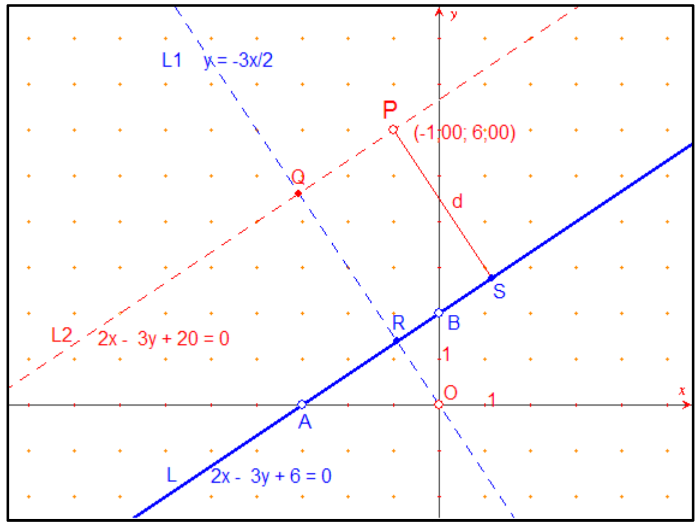
Si se quiere calcular la distancia desde un punto **P** a una recta **L** dada, se puede recurrir a trazar una línea paralela a la recta que pase por el punto dado, entonces es posible calcular la distancia de ambas rectas al origen. La distancia buscada corresponderá a la diferencia de esas dos distancias.

La distancia de un punto cualquiera $\mathbf{P}(x_1, y_1)$ a la recta $\mathbf{A}x + \mathbf{B}y + \mathbf{C} = \mathbf{0}$ está dada por:[3]

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Con $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$.

Ver applet Distancia de un punto a una recta



La figura muestra un ejemplo. Se trata de calcular la distancia del punto **P (1, 6)** a la recta $2x - 3y + 6 = 0$. Esta distancia está representada por el segmento **PS**. Para deducir una expresión que permita hacer el cálculo, se traza por **P** una recta paralela, cuya ecuación es $2x - 3y + 20 = 0$. La fórmula ya conocida permite calcular la distancia de ambas rectas al origen, en la figura estas distancias están representadas por los segmentos **RO** y **QO**. La diferencia de estas dos distancias está representada por el segmento **RQ** equivalente al segmento **PS**. Aplicando la fórmula dada y sustituyendo los valores que se proporcionan en éste ejemplo, tenemos:

$$d = \frac{|(2)(-1) + (-3)(6) + (6)|}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{|(-2) + (-18) + (6)|}{\sqrt{4 + 9}}$$

$$= \frac{|-14|}{\sqrt{13}} = \frac{14}{\sqrt{13}} \approx 3.883$$

Observa que si se calcula la distancia desde el origen a cualquier recta, esto es, si las coordenadas del punto **P** son **(0, 0)** y se sustituyen en la fórmula, entonces la fórmula se convierte en la fórmula que se utilizó para calcular la distancia de una recta al origen.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|A(0) + B(0) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

[3] Para una demostración detallada consultar cualquiera de los textos incluidos en la bibliografía.

Actividades de aprendizaje 04

1. Encuentra la distancia del origen a las siguientes rectas

a) $2x - 6y - 7 = 0$ b) $5x - 7y - 11 = 0$ c) $2x - 4y - 7 = 0$

d) $21x - 3y + 2 = 0$ e) $6x + 10y + 6 = 0$ f) $\frac{2}{5}x + \frac{10}{3}y + \frac{3}{4} = 0$

2. Encuentra la distancia del punto a la recta en cada caso

a) De el punto $(-3, 6)$ a la recta $3x - 8y + 3 = 0$

b) De el punto $(7, 7)$ a la recta $7x - 5y - 4 = 0$

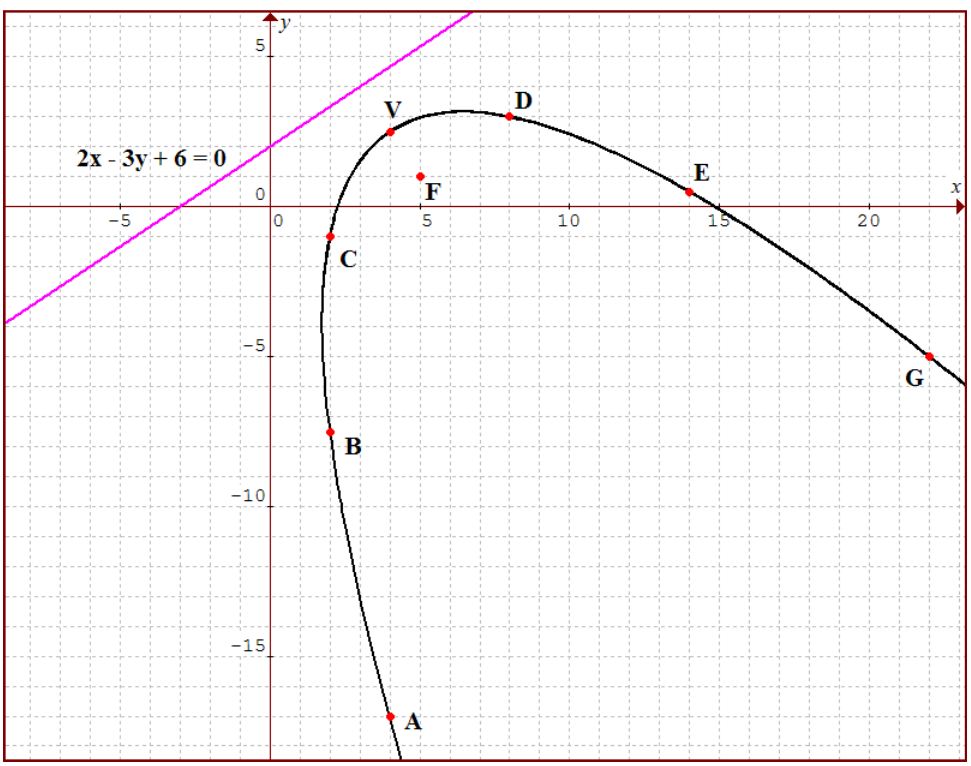
c) De el punto $(1, -4)$ a la recta $7y = -3$

d) De el punto $(-9, 5)$ a la recta $5x = 9$

e) De el punto $(0, 0)$ a la recta $3x + 7y - 93 = 0$

f) De el punto $(-7, 3)$ a la recta $4x - 5y + 8 = 0$

3. La figura muestra una parábola, la recta $2x - 3y + 6 = 0$ es su directriz y el punto **F** $(5, 1)$ es su foco. Los puntos **A** $(4, -17)$, **B** $(2, -7.5)$, **C** $(2, -1)$, **V** $(4, 5/2)$, **D** $(8, 3)$, **E** $(14, 1/2)$ y **G** $(22, -5)$ pertenecen todos a la parábola. Para cada punto encuentra la distancia al foco y la distancia a la directriz. ¿Cómo son estas distancias? ¿Sucede lo mismo en todos los casos?



Resumen

Plano cartesiano

Se conoce como **plano cartesiano** al sistema de coordenadas definido de la siguiente manera: Las coordenadas se refieren a dos rectas perpendiculares entre sí, cada punto del plano está representado por un par de números. Al par de números se les llama **coordenadas cartesianas** del punto y a las rectas se les llama **ejes**; a uno, eje X y, al otro, eje Y. Al punto de intersección de los ejes se le denomina **origen** y se identifica usualmente con la letra **O**.

Para el eje X a partir del origen los números que se ubiquen a la derecha se consideran positivos, los que se sitúan a la izquierda negativos. En el eje Y, los números que están arriba del origen serán positivos y los de abajo, negativos. La forma de anotar el lugar que ocupa un punto en el plano cartesiano es mediante dos coordenadas, separadas por una coma y encerradas entre paréntesis (x, y). Se anota primero la coordenada del punto en el eje X y después la del eje Y. A las coordenadas sobre el eje X, se les conoce como **abscisas**; y a las coordenadas sobre el eje Y, como **ordenadas**.

Distancia entre dos puntos.

La fórmula $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ representa la longitud de un segmento de recta determinado por los puntos $(x_1,\ y_1)$ y $(x_2,\ y_2)$. Esto es, representa la distancia entre dichos puntos.

Punto medio de un segmento.

Si las coordenadas de los extremos de un segmento son (x_1, y_1) y (x_2, y_2), entonces las coordenadas de su punto medio son: $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Distancia de una recta al origen

La distancia $\mathbf{d}$ desde el origen a la recta $\mathbf{A}x + \mathbf{B}y + \mathbf{C} = 0$ está dada por: $d=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Con $\mathbf{A} \neq 0$ y $\mathbf{B} \neq 0.$

Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto $\mathbf{P}(x_1,\ y_1)$ a la recta $\mathbf{A}x + \mathbf{B}y + \mathbf{C} = 0$ está dada por: $d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Con $\mathbf{A} \neq 0$ y $\mathbf{B} \neq 0.$

Ejercicios de Autoevaluación

1. Calcular la distancia entre los siguientes pares de puntos.

   a) **(3, 2)** y **(5, 7)** b) **(–3, 2)** y **(5, 7)** c) **(–3, –1)** y **(–4, 2)**

   d) **(–7, –5)** y **(–1, –3)** e) **(1, 2)** y **(1, –2)**

2. Encontrar el perímetro de los triángulos cuyos vértices son los puntos que se indican.

   a) A **(0, 7)** B **(–4, –2)** C **(5, 2)**

   b) A **(4, 5)** B **(–4, –1)** C **(2, –9)**

   c) A **(8, 6)** B **(4, 4)** C **(–1, 10)**

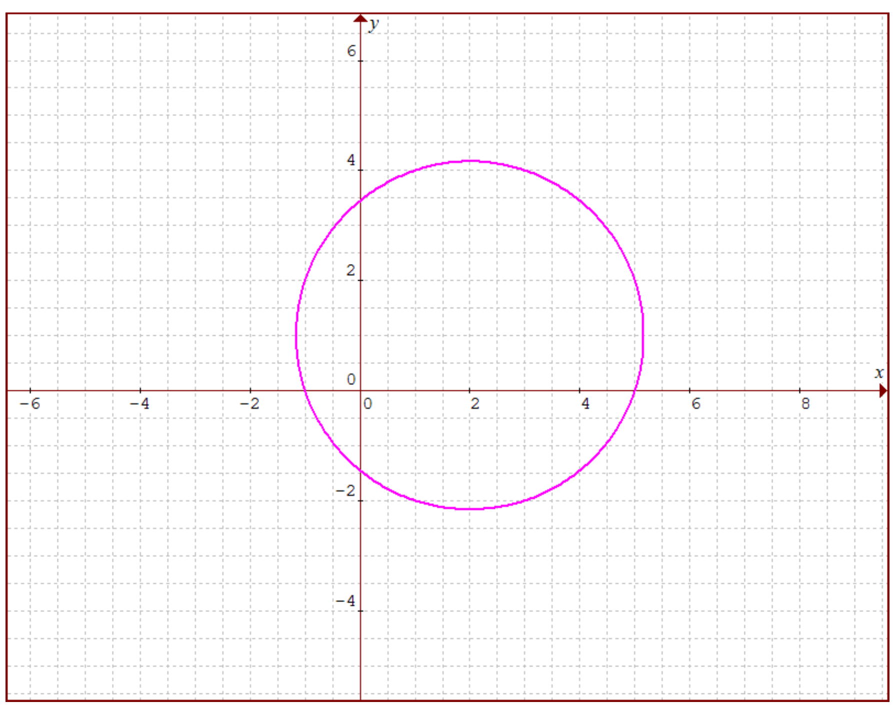
   d) A **(5, 5)** B **(–5, –5)** C $\left(5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}\right)$

3. Dados los vértices encontrar la medida de los lados del triángulo y con base en dichas medidas determinar qué tipo de triángulo (equilátero, isósceles o escaleno) es cada uno de ellos:

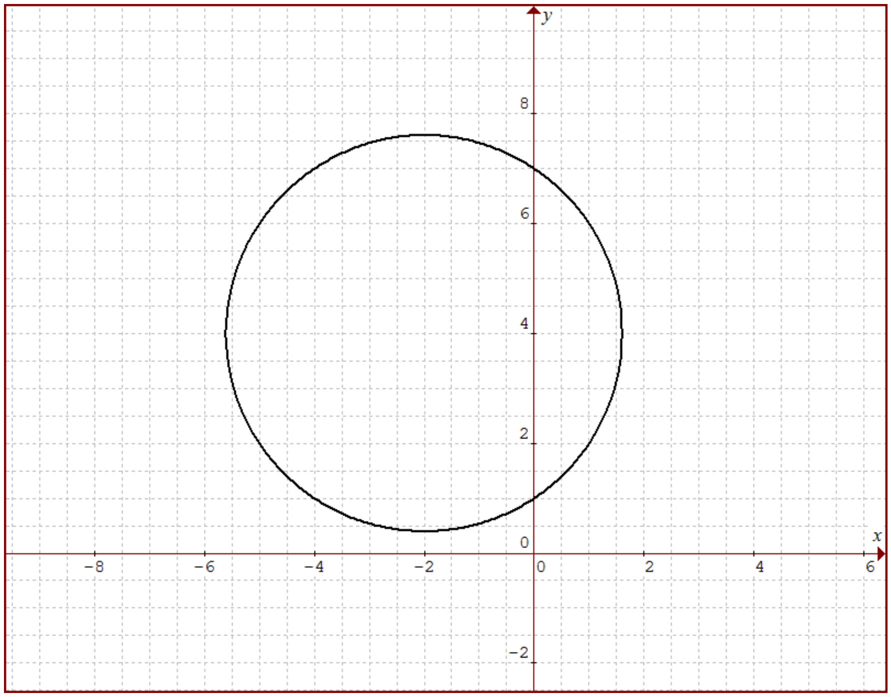
   a) A **(–1, –4)** B **(5, 4)** C **(–6, 6)**

   b) A **(0, 5)** B **(–3, 0)** C **(3, 0)**

4. Determinar el radio de cada uno de los siguientes círculos.



a)

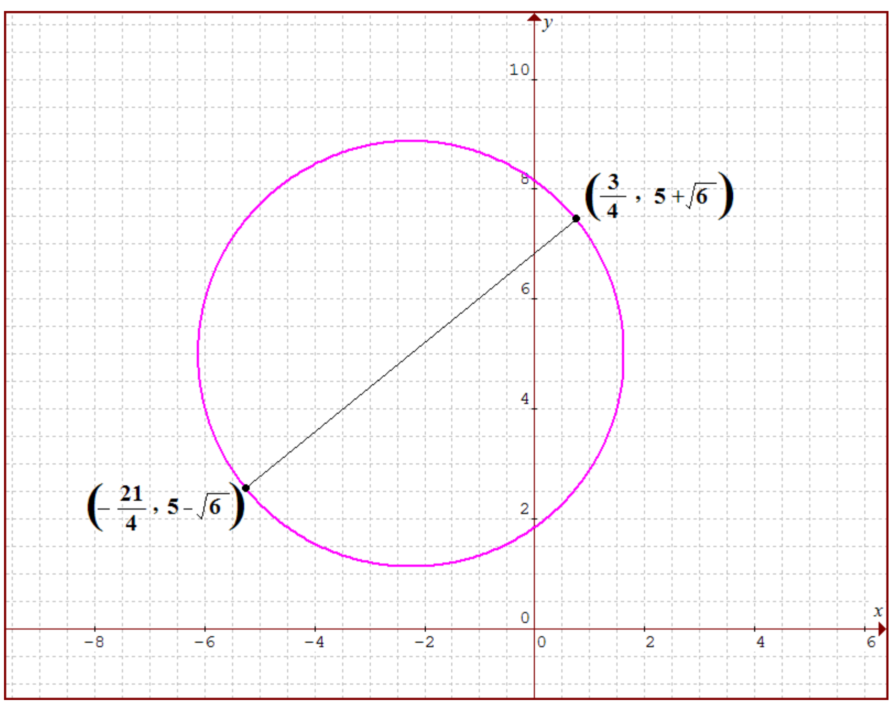


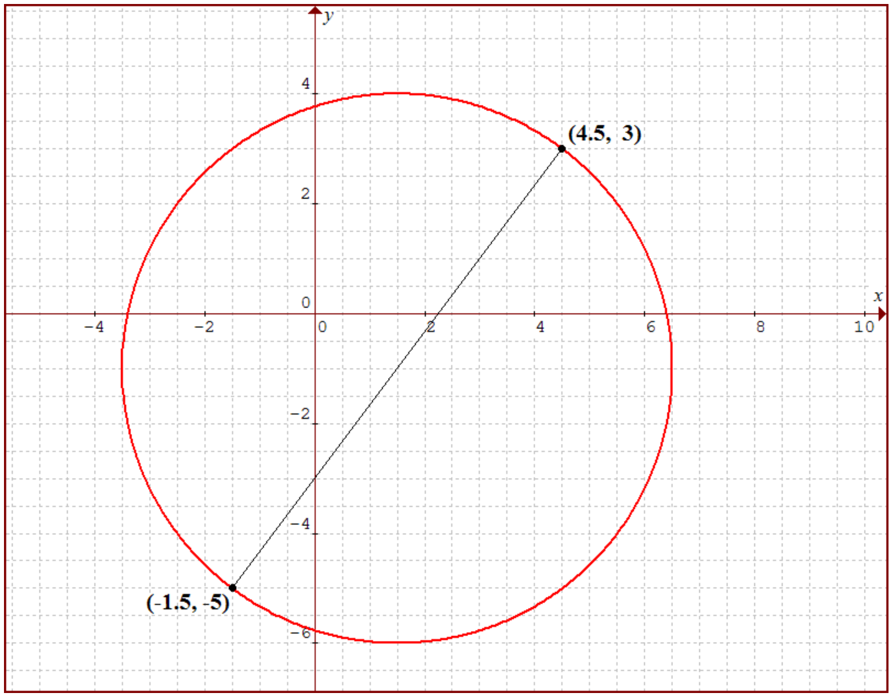
b)

5. Encuentra las coordenadas del punto medio entre los puntos que se indican.

a) **(12, –7)** y **(–6, 15)** b) **(–17, –8)** y **(–1, 11)** c) **(14, –7)** y **(–3, 18)**

6. Las siguientes figuras muestran círculos de los cuales se indican los extremos de un diámetro. Encuentra las coordenadas del centro y calcula la medida del radio de cada uno de ellos.





7. Encuentra la distancia del origen a cada una de las siguientes rectas.

a) $4x - 3y + 15 = 0$ b) $4x - y + 2 = 0$ c) $4x + 2y = 0$

d) $3x + 4y - 2 = 0$ e) $3x + 7y - 3 = 0$ f) $3x + 15y - 9 = 0$

8. Encuentra la distancia del punto a la recta en cada caso

a) Desde el punto $(2, 1)$ a la recta $4x - 3y + 15 = 0$

b) Desde el punto $(3, 2)$ a la recta $4x - y + 2 = 0$

c) Desde el punto $(-1, 3)$ a la recta $4x + 2y = 0$

d) Desde el punto $(2, 7)$ a la recta $3x + 4y - 2 = 0$

e) Desde el punto $(4, 0)$ a la recta $3x + 7y - 3 = 0$

f) Desde el punto $(7, 1/3)$ a la recta $3x + 15y - 9 = 0$

Soluciones a los ejercicios

1. a) $\sqrt{29}$ b) $\sqrt{89}$ c) $\sqrt{10}$ d) $2\sqrt{10}$ e) 4

2. a) $2\sqrt{97}+5\sqrt{2}\approx 26.76$ b) $20+10\sqrt{2}\approx 54.14$

c) $2\sqrt{5}+\sqrt{61}+\sqrt{97}\approx 22.13$ d) $30\sqrt{2}\approx 127.27$

3. a) **Isósceles** b) **Isósceles**

4. a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{13}$

5. a) $(3, 4)$ b) $\left(-9, \frac{3}{2}\right)$ c) $\left(\frac{11}{2}, \frac{15}{2}\right)$

6. a) $C\left(-\frac{9}{4}, 5\right)$ $R=\sqrt{15}$ b) $C\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ $R=5$

7. a) 3 b) $\frac{2}{\sqrt{17}}\approx 0.485$ c) 0 d) $\frac{2}{5}=0.4$ e) $\frac{3}{\sqrt{58}}\approx 0.394$ f) $\frac{3}{\sqrt{26}}\approx 0.588$

8. a) 4 b) $\frac{12}{\sqrt{17}}\approx 2.91$ c) $\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0.447$ d) $\frac{32}{5}=6.4$

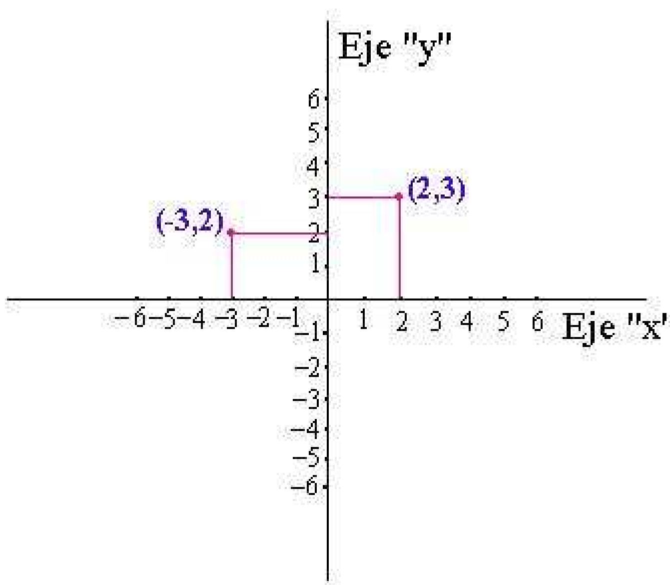
e) $\frac{9}{\sqrt{58}}\approx 1.181$ f) $\frac{17}{\sqrt{234}}\approx 1.111$

Las coordenadas tal como se utilizan hoy

El desarrollo de la geometría de coordenadas tendrá más sentido si explicamos primero cómo trabaja la versión moderna. Existen diversas variantes, pero las más comunes empiezan trazando dos rectas perpendiculares en el plano, llamadas ejes. Su punto de encuentro común es el origen. Los ejes se disponen convencionalmente de modo que uno de ellos es horizontal y el otro vertical.

A lo largo de ambos ejes escribimos los números enteros, con los números positivos en una dirección y los negativos en la otra. Convencionalmente, se denomina eje x al eje horizontal y eje y al vertical. Los símbolos x e y se utilizan para representar puntos en estos ejes respectivos –distancia al origen–. Un punto general en el plano, a distancia x a lo largo de eje horizontal y distancia y a lo largo del vertical, se etiqueta con un par de números (x, y). Estos números son las coordenadasde dicho punto.

Cuaquier ecuación que relaciona x e y restringe los puntos posibles. Por ejemplo, si $x^2 + y^2 = 1$, entonces (x, y) debe estar a distancia 1 del origen, por el Teorema de Pitágoras. Tales puntos forman un círculo. Decimos que $x^2 + y^2 = 1$ es la ecuación de dicho círculo. Toda ecuación corresponde a una curva en el plano; recíprocamente, toda curva corresponde a una ecuación.



Stewart, Ian (2008). *Historia de las Matemáticas, en los últimos 10,000 años*. Editorial: Crítica. Barcelona. p. 94.